МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТ им. Р. Е. АЛЕКСЕЕВА»

**А.З. ПАНКРАТОВА, А.С. СУРКОВА**

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

*Рекомендовано Учёным советом Нижегородского   
государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева   
в качестве учебного пособия для бакалавров   
по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»*

Нижний Новгород 2023

**УДК 519.6**

**ББК 22.19**

**П 163**

*Рецензенты:*

доктор технических наук, профессор *Ю.С.Федосенко,*

доктор технических наук, доцент *Н.В.Старостин*

**Панкратова А.З., Суркова А.С.**

**П 163 Вычислительная математика:** учеб. пособие /А.З. Панкратова, А.С. Суркова; Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2023. – 82 с.

**ISBN 978-5-502-675-5**

Рассмотрены базовые категории курса «Вычислительная математика», изложены основные понятия, формулы и алгоритмы. Рассмотрены методы решения уравнений и систем, решения задач аппроксимации, численного интегрирования и дифференцирования. По каждой теме приведены контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Информатика и вычислительная техника», а также студентов других направлений и специальностей, изучающих дисциплины «Вычислительная математика», «Численные методы».

Рис. 3. Табл. 14. Библиогр.: 23 назв.

**УДК 519.6**

**ББК 22.19**

|  |  |
| --- | --- |
| **ISBN 978-5-502-675-5** | ** Нижегородский государственный технический университет  им. Р.Е. Алексеева, 2023**  **Панкратова А.З., Суркова А.С. 2023** |

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 5](#_Toc131462392)

[**1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ 6**](#_Toc131462393)

[1.1. Приближенные числа и погрешности 6](#_Toc131462394)

[1.2. Прямая и обратная задачи теории погрешностей 10](#_Toc131462395)

[**2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 16**](#_Toc131462396)

[2.1. Корень уравнения. Основные теоремы 16](#_Toc131462397)

[2.2. Отделение и локализация корня. Шаговый метод 16](#_Toc131462398)

[2.3. Приближенные методы решения уравнений. 17](#_Toc131462399)

[**3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 22**](#_Toc131462400)

[3.1. Прямые методы решения систем линейных уравнений 22](#_Toc131462401)

[3.2. Итерационные методы решения систем линейных уравнений 24](#_Toc131462402)

[**4. АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ 30**](#_Toc131462403)

[4.1. Метод наименьших квадратов 30](#_Toc131462404)

[4.2. Интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа 33](#_Toc131462405)

[**5. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ 41**](#_Toc131462406)

[5.1. Численное дифференцирование на основе многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов 41](#_Toc131462407)

[5.2. Численное дифференцирование на основе многочлена Ньютона для равноотстоящих узлов: 42](#_Toc131462408)

[**6. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ 46**](#_Toc131462409)

[6.1. Методы численного интегрирования 46](#_Toc131462410)

[6.2. Погрешность формул численного интегрирования 47](#_Toc131462411)

[**7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ 51**](#_Toc131462412)

[7.1 Метод непосредственного развертывания 52](#_Toc131462413)

[7.2. Метод Крылова 53](#_Toc131462414)

[7.3. Метод Данилевского 55](#_Toc131462415)

[**8. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 69**](#_Toc131462416)

[8.1. Методы численного решения дифференциальных уравнений. Метод Эйлера 70](#_Toc131462417)

[8.2. Усовершенствованный метод Эйлера (метод Гюна) 71](#_Toc131462418)

[8.3. Методы Рунге-Кутты 73](#_Toc131462419)

[8.4. Многошаговые методы. 75](#_Toc131462420)

[**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 80**](#_Toc131462421)

# ВВЕДЕНИЕ

Все методы решения математических задач делятся на два класса: точные и приближенные. В точных методах решение можно получить в виде аналитического выражения, но эти методы применимы только для решения ограниченного круга задач. Поэтому большое значение при решении инженерных задач приобрели численные (вычислительные) методы, особенно с возрастанием роли ЭВМ.

Современная вычислительная техника требует знаний основ вычислительной математики и их применения к решению научно-технических задач. Развитие вычислительной техники позволило исследовать сложные проблемы и явления с помощью соответствующей математической модели. Такой метод исследования назван ***вычислительным экспериментом***.

Схема вычислительного эксперимента выглядит следующим образом: формулируются основные законы, управляющие данным объектом исследования, и строится математическая модель.

***Модель*** представляет собой запись законов управления объектом в форме системы уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и др.). После получения математической модели необходимо найти ее решение. Но в явном виде это удается сделать лишь в исключительных случаях. Именно на этом этапе вычислительного эксперимента требуется привлечение ЭВМ, а также использование численных методов.

Под ***численным методом*** понимается такая интерпретация математической модели (называемая иногда дискретной), которая доступна для реализации на ЭВМ. Результатом реализации численного метода является число или массив чисел. Чтобы реализовать численный метод, нужно составить программу для ЭВМ на том или ином языке программирования. После этапа отладки программы проводятся вычисления и анализ результатов. Полученные результаты изучаются с точки зрения их соответствия исследуемому явлению. При необходимости вносятся уточнения в математическую модель и изменения в численный метод, затем описанные этапы повторяются.

Таким образом, основу вычислительного эксперимента составляет: математическая модель; численный метод и программа для ЭВМ. В данном учебном пособии рассматриваются численные методы решения основных задач математического анализа.

# 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

# 1.1. Приближенные числа и погрешности

***Приближенным числом*** называется число, незначительно отличающееся от точного значения этого числа и заменяющее его в вычислениях. Под ошибкой или ***погрешностью приближенного числа*** понимают разность между соответствующим точным числом и приближенным.

При работе с приближёнными числами приходится решать следующие задачи:

* приводить математические характеристики оценки точности приближённых величин;
* оценивать точность результата, когда известна точность исходных данных;
* находить точность исходных данных, обеспечивающую заданную точность результата;
* согласовывать точность различных исходных данных, чтобы не затрачивать излишние вычислительные ресурсы;
* следить в процессе вычислений за точностью промежуточных результатов для одновременного обеспечения необходимой точности результата и упрощения вычислений.

Основная задача теории погрешностей состоит в оценке погрешности результата вычислений при известных погрешностях исходных данных. Решение задачи с помощью ЭВМ всегда содержит погрешность и является приближенным. Отклонение измеряемой величины от её истинного значения называется ***погрешностью***.

Источниками возникновения погрешности являются:

* погрешность математической модели;
* погрешность в исходных данных;
* погрешность использованного численного метод;
* погрешность округления или отбрасывания значащих цифр.

Погрешность математической модели определяется выбором самой модели. Например, решая задачу о движении снаряда, мы можем учесть сопротивление воздуха или пренебречь им, что приводит к разным результатам в вычислениях.

Погрешность в исходных данных возникает в силу погрешности измерений или вычислений, с помощью которых были получены эти данные. Погрешность численного метода определяется точностью выбранного численного метода и погрешностью инструмента вычислений. Погрешность из-за округления или отбрасывания лишних цифр возникает тогда, когда мы стремимся к короткой записи числа и отбрасываем значащие цифры в записи числа.

По форме количественного выражения погрешности подразделяются на абсолютные и относительные.

***Абсолютной погрешностью*** (Δ*х*) приближенного числа *x* называется абсолютная величина разности между приближенным числом (*x*) и точным или действительным значением числа (). Она может получиться как положительной, так и отрицательной. Эта погрешность обычно точно неизвестна, поскольку неизвестно истинное значение числа. Поэтому вводят понятие предельной абсолютной погрешности

Таким образом, под предельной абсолютной погрешностью приближенного числа понимают любое число, не меньшее абсолютной погрешности этого числа.

***Относительной погрешностью*** (δ) называется отношение абсолютной погрешности измерения к истинному (или действительному) значению числа. Она вычисляется по формуле

***Значащими цифрами числа*** называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева цифры. Например, в числах *a* = 0.127, *a* = 0.0054 значащими цифрами являются подчеркнутые цифры. Число значащих цифр в первом случае равно трем, во втором двум.

Любое положительное число *х* можно записать в виде

.

Значащую цифру называют ***верной в широком смысле***, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре:

Значащую цифру называют ***верной в узком смысле***, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре:

**Пример 1.1**. Определить верные в широком и узком смысле цифры в числе α = 0,0304500. Ответ для разных значений погрешности приведен в табл. 1.1.

***Таблица 1.1***

**Верные цифры в числе α = 0,0304500**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Абсолютная**  **погрешность** | **Верные цифры в числе и их количество** | | | |
| **В широком смысле** | | **В узком смысле** | |
| 0.001 | 2: | 0,0304500 | 1: | 0,0304500 |
| 0.005 | 1: | 0,0304500 | 1: | 0,0304500 |
| 0.0003 | 2: | 0,0304500 | 2: | 0,0304500 |
| 0.00007 | 3: | 0,0304500 | 3: | 0,0304500 |

Число знаков после запятой говорит о предельной абсолютной погрешности; на предельную относительную погрешность указывает общее число верных знаков. Чем больше верных знаков в числе, тем меньше предельная относительная погрешность.

Сформулируем правила оценки предельных погрешностей при выполнении операции над приближёнными числами.

1. При сложении или вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются. Относительная погрешность суммы заключена между наибольшим и наименьшим значениями относительных погрешностей слагаемых, на практике принимается наибольшее значение.

2. При умножении или делении чисел друг на друга их относительные погрешности складываются.

3. При возведении в степень приближённого числа его относительная погрешность умножается на показатель степени.

***Вычисления без учёта погрешностей***

При массовых вычислениях, когда не учитываются погрешность каждого отдельного результата, рекомендуется пользоваться следующими правилами подсчёта цифр:

1. При сложении и вычитании приближённых чисел младший сохранённый десятичный разряд результата должен являться наибольшим среди десятичных разрядов, выраженных последними верными значащими цифрами исходных данных.

2. При умножении и делении приближённых чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое данное с наименьшим числом верных значащих цифр.

3. При возведении в степень приближённого числа в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет основание степени.

4. Во всех промежуточных результатах следует сохранять на одну цифру больше, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта «запасная» цифра отбрасывается.

5. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с *k* верными цифрами исходные данные следует брать с таким числом цифр, которые, согласно предыдущим правилам, обеспечивают (*k*+1) верную цифру в результате

**Пример 1.2.** Вычислим сумму

*S*  132*,*7  1*,*274  0*,*06321  20*,*96  46*,*1521.

Складывая все эти числа, получим *S* 201*,*14931. Округляя до 0,1. Имеем *S*201*,*1. Теперь выполним вычисления, учитывая правила 1 и 5. Самая большая абсолютная погрешность у первого слагаемого, равна 0,1, поэтому прочие слагаемые округляем до 0,01, тогда

*S*  132*,*7  1*,*27  20*,*96  46*,*15 = 201*,*14.

После округления получим S 201,1, т.е. верный результат. Если бы мы не воспользовались правилом лишнего знака и округляли все слагаемые до 0,1, то получили бы менее точный результат

*S*  132*,*7 1*,*3  0*,*1 21 46*,*2  201*,*3*.*

Рассмотрим пример, демонстрирующий, как можно уменьшать погрешность результата, обусловленную погрешностью округления.

**Пример 1.3**. Требуется найти сумму пяти четырёхразрядных чисел:

*S*  0*,*2764  0*,*3944 1*,*475  26*,*46 1364.

Складывая все эти числа, а затем, округляя результат до четырёх значащих цифр, получаем *S*1393. Однако при вычислениях на компьютере округление происходит после каждой операции сложения. Предполагая условно сетку четырёхразрядной, проследим за вычислениями суммы чисел в порядке их записи:

0*,*2764  0*,*3944  0*,*6708, 0*,*6708  1*,*475  2*,*156,   
2*,*156  26*,*46  28*,*62, 28*,*62  1364 1393,

получили , т.е. верный результат.

Изменим теперь порядок вычислений и начнём складывать числа последовательно от последнего к первому:

1364  26*,*46  1390, 1390  1*,*475  1391,  
1391  0*,*3944  1391, 1391  0*,*2764  1391,

получим , результат менее точный.

# 1.2. Прямая и обратная задачи теории погрешностей

***Прямая задача теории погрешностей***

Рассмотрим основную задачу теории погрешностей, которая заключается в следующем: известны погрешности аргументов некоторой сложной функции, требуется определить погрешность данной функции от этих величин.

Пусть – дифференцируемая функция многих переменных. Известны или . Тогда

**Пример 1.4**. Дана функция . Найти абсолютную и относительную погрешности функции при заданных значениях:

Вычислим значение приближенное значение функции

Найдем значения абсолютных погрешностей из условия и вычислим значения относительных погрешностей по определению:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Вычислим относительную погрешность сложной функции

и абсолютную погрешность функции

***Обратная задача теории погрешности***

На практике важна также обратная задача: каковы должны быть абсолютные погрешности аргументов функции , чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины. Простейшее решение обратной задачи дается так называемым принципом равных влияний. Предполагается, что все частные дифференциалы

одинаково влияют на образование общей абсолютной погрешности функции . Пусть величина предельной абсолютной погрешности ΔZ задана, тогда

***Устойчивость и корректность вычислительных методов***

Предположим, что погрешности исходных данных заданы и не могут быть уменьшены более точными измерениями. Поскольку это так называемые неустранимые погрешности, то нужно хотя бы иметь представление об их влиянии на точность окончательных результатов. К сожалению, не всегда погрешность результатов имеет погрешность исходных данных.

Пусть в результате решения задачи по исходному значению величины *x* находится значение искомой величины *y*. Будем считать, что исходная величина имеет абсолютную погрешность Δ*x*, а решение имеет погрешность Δ*y*. Задача называется ***устойчивой*** по исходному параметру *x*, если решение *y* непрерывно от него зависит, т.е. малое приращение исходной величины Δ*x* приводит к малому приращению искомой величины Δ*y*.

Примером такой задачи является отыскание действительных корней многочленов вида . Изменение правой части на величину порядка ε приводит к погрешности корней порядка .

Задача называется ***поставленной******корректно***, если для любых значений исходных данных их некоторого класса её решение существует, единственно и устойчиво по исходным данным.

Рассмотренный пример неустойчивой задачи является некорректно поставленным. Применять для решения таких задач численные методы, как правило, нецелесообразно, поскольку возникающие в расчётах погрешности округлений будут сильно возрастать, что приведёт к значительному искажению результатов.

**Контрольные вопросы**

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Сформулируйте определение верной значащей цифры числа. Приведите примеры.
3. Каковы правила работы с приближёнными числами при арифметических расчётах?
4. Каковы правила оценки предельных погрешностей при выполнении операций над приближёнными числами?
5. Как проводить вычисления без учёта погрешностей?
6. Опишите основную (прямую) задачу теории погрешностей.
7. Опишите обратную задачу теории погрешностей и основные методы её решения.

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Дана матрица 3 x 3. В каждый из диагональных элементов матрицы A по очереди внести погрешность в 1 %. Как изменился определитель матрицы А? Указать количество верных цифр и вычислить величину относительной погрешности определителя в каждом случае.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | . |  | . |
|  |  |  | . |
|  | . |  | . |
|  |  |  | . |

2. Дано квадратное уравнение , значения коэффициентов приведены в табл. 1.2. Предполагается, что один из коэффициентов уравнения (в задании помечен \*) получен в результате округления. Произвести теоретическую оценку погрешностей корней в зависимости от погрешности коэффициента. Вычислить корни уравнения при нескольких различных значениях коэффициента в пределах заданной точности. Сравнить полученные результаты.

***Таблица 1.2***

**Значения коэффициентов** **уравнения**

|  |  |
| --- | --- |
| **№** | **Коэффициенты уравнения** |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

3. По табл. 1.3 найдите абсолютную и относительную погрешности функции в заданной точке, если известны абсолютные погрешности аргументов.

4. По табл. 1.3 найдите абсолютные погрешности аргументов функции в заданной точке (по принципу равных влияний), если задана абсолютная погрешность функции.

***Таблица 1.3***

**Данные для задач 3 и 4**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Функция** | **Данные для задачи 3** | **Данные для задачи 4** |
| 1 | *z* 3*xy* cos *x*  *y**ex* | *x*  4*;* *x*  0*,*3*; y*  2*;* *y*  0*,*2 | *x*  2*; y*  3*;* *z* 1*,*2 |
| 2 | *u* 3cos2*x* 5sin *(xy)*  4 | *x*  2*;* *x*  0*,*2*; y*  4*;* *y*  0*,*1 | *x*  3*; y*  4*;**u*  0*,*5 |
| 3 | *z* 3*x**ey*  cos2 *x* | *x*  2*;**x*  0*,*1*; y* 3*;* *y*  0*,*3 | *x*  2*; y* 1*;* *z*  0*,*4 |
| 4 | *u*  2*xy*  cos *x*  *y* | *x* 3*;* *x*  0*,*1*; y*  2*;* *y*  0*,*3 | *x*  2*; y*  4*;**u*  0*,*7 |
| 5 | *u*  2*ex* ln *xy* 3 | *x* 10*;* *x*  0*,*1*; y*  3*;* *y*  0*,*2 | *x*  2*;y*  4*;**u* 1*,*2 |
| 6 | *z* arctg e*x*  *xy*2 | *x* 3*;* *x*  0*,*2*; y*  4*;* *y*  0*,*1 | *x* 5*; y*  6*;* *z*  0*,*5 |
| 7 | *z* ln2 *x*  4*y*cos *x* | *x* 3*;* *x*  0*,*1*; y*  4*;* *y*  0*,*2 | *x* 1*; y* 5*;* *z*  0*,*3 |
| 8 | *u* 12*x*2 *y*  4ln *x* | *x*  2*;* *x*  0*,*2*; y*  4*;* *y*  0*,*1 | *x* 1*;y*  3*;**u* 1*,*1 |
| 9 | *z* *ex y*  sin 3*x* | *x*  2*;* *x*  0*,*1*; y*  5*;* *y*  0*,*3 | *x*  4*; y*  3*;* *z*  0*,*6 |
| 10 | *z* lg *x* tg2 *y*  *x*2 | *x*  2*;* *x*  0*,*3*; y*  4*;* *y*  0*,*2 | *x*  3*; y* 8*;* *z*  0*,*8 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 11 | *z* 3*x* cos *y*  ln2*x* | *x* 3*;* *x*  0*,*2*; y*  4*;* *y*  0*,*1 | *x*  2*; y*  4*;* *z*  0*,*4 |
| 12 | *z* 3 ln2 4*x*  *ey* | *x* 5*;* *x*  0*,*2*; y*  4*;* *y*  0*,*1 | *x* 3*; y* 10*;* *z*  0*,*6 |
| 13 | *f*  ln2 *x*  *y*  cos *y* | *x*  3*;* *x*  0*,*2*; y*  2*;* *y*  0*,*1 | *x*  3*; y*  4*;* *f* 1*,*1 |
| 14 | *u*  8*xy*  cos3*x* | *x*  5*;* *x*  0*,*1*; y* 8*;* *y*  0*,*2*;* | *x*  2*; y*  3*;**u* 1 |
| 15 | *u*  4*xy*  cos *ex* | *x* 10*,*8*;* *x*  0*,*1*; y*   5*;* *y*  0*,*2*;* | *x*  2*; y* 5*;**u*  0*,*7 |

5. Радиус основания цилиндра  м; высота цилиндра  м. С какими абсолютными погрешностями нужно определить *R* и *H*, чтобы его объём *V* можно было вычислить с точностью до ?

6. Найти предельные абсолютную и относительную по грешности объёма шара диаметра *d* = 3,7 см ± 0,05 см. Считать π = 3,14.

7. С какой точностью нужно измерить радиус круга  см и со сколькими знаками взять число π, чтобы площадь круга была известна с точностью до 1 %?

# 2. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

# 2.1. Корень уравнения. Основные теоремы

Рассмотрим уравнение , где функция определена и непрерывна в некотором конечном и бесконечном интервале .

Корнем уравнения называется значение , обращающее функцию в нуль, т.е. такое, что . Уравнение называется ***алгебраическим***, если функция является многочленом

в противном случае уравнение называется ***трансцендентным***.

Чаще всего на практике алгебраические и трансцендентные уравнения не удается решить аналитическими методами. Для решения используются численные методы. Алгоритм нахождения корня уравнений с помощью численного метода состоит из двух этапов:

1) отделение и локализация корня, т.е. установление промежутка ], в котором содержится один корень;

2) уточнение значения корня, т.е. находят корни с заданной точностью.

Теоретическим обоснованием существования корней на промежутке ] являются следующие теоремы.

**Теорема 1**. Если функция непрерывна на отрезке ], причем  
, то на этом отрезке существует хотя бы один корень уравнения .

**Теорема 2**. Если непрерывная функция монотонна на отрезке ], причем , то на этом отрезке существует единственный корень уравнения .

# 2.2. Отделение и локализация корня. Шаговый метод

Существует несколько методов отделения корней: геометрический, аналитический и шаговый. При геометрическом методе отрезки, на котором находятся корни, определяют по графику функции. В аналитическом методе отрезки определяют с помощью исследования функций средствами математического анализа. Рассмотрим подробнее шаговый метод локализации корня. Дано уравнение. Задан интервал поиска ]. Требуется найти интервал ] длиной *h*, содержащий первый корень уравнения, начиная с левой границы интервала поиска.

*Алгоритм метода*

1. Установить .

2. Определить координату точки *,* а также значения функции в точках и : и.

3. Проверить выполнение условия . Если условие не выполнено – положить и перейти к п. 2, если выполнено – закончить алгоритм.

После того, как найден интервал локализации корня, применяют итерационные методы уточнения корня. Рассмотрим методы: половинного деления, метод Ньютона, метод хорд и метод простой итерации.

# 2.3. Приближенные методы решения уравнений

***Метод половинного деления***

Метод половинного деления также называют методом деления пополам, методом бисекций или дихотомии. Метод основан на последовательном сужении интервала, содержащего единственный корень уравнения до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность . Пусть задан отрезок ], содержащий один корень уравнения. Этот отрезок может быть предварительно найден с помощью шагового метода.

*Алгоритм метода*

1. Определить новое приближение корня в середине отрезка ]: .

2. Найти значения функции в точках и : и .

3. Проверить выполнение условия . Если условие выполнено, то корень расположен на отрезке ]*.* В этом случае необходимо точку *b* переместить в точку *x* *.* Если условие не выполнено, то корень расположен на отрезке ]*.* В этом случае необходимо точку a переместить в точку .

4. Перейти к п. 1 и вновь поделить отрезок пополам. Алгоритм продолжить до тех пор, пока не будет выполнено условие .

Иллюстрация метода половинного деления приведена на рис. 1.

Метод прост в реализации. Недостаток: если на отрезке ] содержится более одного корня, то метод не работает, т.к. заранее неизвестно, к какому корню сойдется итерационный процесс.

|  |
| --- |
|  |
| **Рис. 1. Иллюстрация метода половинного деления** |

***Метод хорд (секущих)***

Метод хорд или метод секущих основан на замене функции на каждом шаге поиска хордой на отрезке ], пересечение хорды с осью *OX* дает приближение корня. При этом в процессе поиска семейство хорд может строиться при фиксированном левом конце хорд, т.е. начальная точка (рис. 2,*а*); или при фиксированном правом конце хорд, т.е. начальная точка (рис. 2,*б*). Фиксированный конец хорд выбирается из условия

Итерационная формула при фиксированном левом конце хорд

при фиксированном правом конце хорд:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| **Рис. 2. Иллюстрация метода хорд (секущих)** | |
| *а* - при фиксированном левом конце хорд; б - при фиксированном правом конце хорд | |

Процесс поиска продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие .

***Метод Ньютона (метод касательных)***

Задан отрезок ], содержащий корень уравнения . Метод Ньютона основан на замене исходной функции на каждом шаге поиска касательной, проведенной к этой функции. Пересечение касательной с осью *OX* дает приближение корня. Выберем начальную точку (конец интервала). Находим значение функции в этой точке и проводим к ней касательную, пересечение которой с осью *OX* дает первое приближение корня - (рис.3). Иногда для выбора первоначального значения начальной точки в методе используют то же условие, что и в методе хорд для выбора фиксированного конца отрезка.

|  |
| --- |
|  |
| **Рис.3. Иллюстрация метода Ньютона** |

, где , поэтому .

В результате итерационный процесс поиска корня описывается рекуррентной формулой

Процесс поиска продолжаем, пока не выполнится условие:  
. Из рис. 3 видно, что метод имеет быструю сходимость.

***Метод простой итерации***

Метод основан на замене исходного уравнения на эквивалентное *.* Функция выбирается таким образом, чтобы на обоих концах отрезка ] выполнялось условие сходимости . В этом случае в качестве начального приближения можно выбрать любой из концов отрезка.

Итерационная формула имеет вид .

Итерационный процесс продолжается, пока не будет выполнено условие .

**Пример 2.1**. Методом простых итераций найти значение корня уравнения с точностью до 0,001 на отрезке ].

Запишем уравнение в следующем виде:

на отрезке [1, 2].

Условие сходимости выполнено, поэтому метод простой итерации применить можно. В качестве начального приближения возьмем Итерационная формула имеет вид

Для удобства результаты вычислений занесем в табл. 2.1.

***Таблица 2.1***

**Вычисление корня нелинейного уравнения методом   
простых итераций**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***i*** | ***xi*** |  |
| 1 | 2 | – 0,30103 |
| 2 | 1,69897 | 0,070844 |
| 3 | 1,769814 | – 0,01774 |
| 4 | 1,752072 | 0,004376 |
| 5 | 1,756448 | – 0,00108 |
| 6 | 1,755633 | 0,000268 |

Приближенное значение корня уравнения .

**Контрольные вопросы**

* 1. Понятие численного решения нелинейного уравнения.
  2. Какие методы локализации и отделения корней существуют?
  3. Какие методы численного решения нелинейных уравнений существуют?
  4. В чем отличия методов численного решения нелинейных уравнений?

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Решить нелинейное уравнение с одним неизвестным с использованием четырех методов (половинного деления, хорд, Ньютона, простой итерации) с точностью до 0,001:

|  |  |
| --- | --- |
|  | ; |
|  | ; |
|  | ; |
|  | ; |
|  | ; |
|  | ; |
|  | ; |
|  | ; |
|  | ; |

2. Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом простой итерации с точностью до 0,001

3. Отделить корни уравнения графически и уточните один из них методом хорд с точностью до 0,001

4. Найти действительные корни уравнения известными способами с точностью до трех значащих цифр

# 3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

К решению систем линейных уравнений сводятся многочисленные практические задачи. Решение линейных систем является одной из самых распространенных и важных задач вычислительной математики. Значимость задачи породила ряд методов решения, среди этих методов есть как универсальные, так и специализированные, применимые к некоторым системам, имеющим специальные свойства. Однако не существует единого предпочтительного во всех случаях метода.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.1) |

Эта система может быть записана в матричном виде: , где

Методы решения систем линейных уравнений подразделяются на две группы: прямые и итерационные. Прямые методы используют конечные соотношения (формулы), по которым можно найти точное решение систем линейных алгебраических уравнений. Итерационные методы основаны на использовании повторяющегося процесса и позволяют получить решение в результате последовательных приближений.

# 3.1. Прямые методы решения систем линейных уравнений

***Матричный метод***

Матричный метод решения применим к системам с ненулевым определителем (). Умножим систему в матричной форме слева на : , тогда .

***Метод Крамера***

Данный метод также применим только к системам с ненулевым определителем. Если , корни системы уравнений находятся по формуле , где – определитель матрицы, полученной из матрицы заменой -го столбца столбцом свободных членов, вычисляется по следующей формуле:

.

Указанные методы очень трудоемки для решения систем большой размерности, поскольку нахождение определителей и обратной матрицы требует больших вычислительных мощностей.

***Метод Гаусса***

Метод основан на приведении матрицы системы линейных уравнений к треугольному виду (элементы матрицы ниже главной диагонали равны нулю). Треугольный вид матрицы достигается последовательным исключением переменных из уравнений путем элементарных преобразований. Затем находятся все переменные системы последовательно, начиная с последних по номеру.

Более подробно метод Гаусса можно разбить на два этапа:

*Этап 1– прямой ход*. Пусть , тогда с помощью первого уравнения путем элементарных преобразований можно исключить из всех последующих уравнений. Затем, если , с помощью второго уравнения исключаем из всех уравнений, начиная с третьего. Аналогично поступают со всеми остальными уравнениями.

Если в процессе исключения переменных на каком-то этапе диагональный элемент оказывается равным нулю (), то необходимо переставить уравнения так, чтобы диагональный элемент был не равен нулю. Если таких уравнений не находится, то система не является линейно независимой и имеет множество решений.

В результате прямого хода метода Гаусса получается треугольная матрица

*Этап 2 – обратный ход*. Из последнего уравнения выражаем :

Подставляем полученное выражение в предпоследнее () уравнение и выражаем :

Полученное значение подставляем в предыдущее уравнение и таким образом последовательно находим все переменные.

# 3.2. Итерационные методы решения систем линейных уравнений

***Метод простой итерации (метод Якоби)***

Приведем систему к виду: , где , . Тогда поиск решения можно представить итерационным процессом:

Рассматриваем начальное приближение , находим приближение на первом шаге, втором и т.д.:

От значения зависит сходимость метода и скорость сходимости алгоритма.

Выразим из -го уравнения системы (3.1) переменную :

Возьмем произвольное начальное приближение , тогда

Вычисления производят пока не будет достигнут критерий завершения (остановки). Критериями могут быть условия:

* ;
* .

Справедливо утверждение: если в системе линейных уравнений матрица А имеет диагональное преобладание, то метод простой итерации сходится при любом начальном приближении. .

***Метод Гаусса-Зейделя***

Данный метод является модификацией метода простой итерации, основан на использовании информации, получаемой на итерации для расчетов на этой итерации. Формула для расчета переменной на -й итерации:

Приведем подробные формулы для вычисления переменных для  
 для метод простой итерации и метод Гаусса-Зейделя.

Выражаем переменные:

Метод *простой итерации:*

Метод *Гаусса-Зейделя:*

Если в системе линейных уравнений матрица А имеет диагональное преобладание, то метод Гаусса-Зейделя сходится при любом начальном приближении. .

**Пример 2.2**. Найти решение системы линейных уравнений методом Гаусса, методами простой итерации и Гаусса-Зейделя ():

*Метод Гаусса*. Приводим матрицу к треугольному виду

Решение системы:

*Метод простой итерации и метод Гаусса-Зейделя*:

Возьмем начальное приближение

Решение методом *простой итерации*:

1-я итерация:

2-я итерация:

3-я итерация:

4-я итерация:

Получаем , задача решена.

Решение методом *Гаусса-Зейделя*:

1-я итерация:

2-я итерация:

3-я итерация:

Получаем , задача решена. При этом потребовалось только три итерации, чтобы достичь необходимой точности.

**Контрольные вопросы**

* 1. Понятие прямого и итерационного метода решения систем линейных уравнений
  2. В чем сущность метода Гаусса решения систем линейных уравнений?
  3. В чем сущность метода простой итерации?
  4. Чем метод Гаусса-Зейделя отличается от метода простой итерации?

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Решить системы методом Гаусса

2. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса с точностью 0,001.

3. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса-Зейделя с точностью 0,001.

4. Решить систему методом простой итерации и методом Гаусса-Зейделя с точностью до 0,001. Сравнить количество итераций.

# 4. АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

# 4.1. Метод наименьших квадратов

***Аппроксимация опытных данных*** –метод, основанный на замене экспериментально полученных данных аналитической функцией, наиболее близко проходящей или совпадающей в узловых точках с исходными значениями (данными, полученными в ходе опыта или эксперимента).

Задача аппроксимации может возникнуть:

* при определении функциональной зависимости по экспериментальным данным, представленным в табличной форме;
* замене сложной с вычислительной точки зрения функции более простой зависимостью;
* дифференцировании и интегрировании.

В настоящее время существует два способа определения аналитической функции:

* с помощью построения ***интерполяционного многочлена n-степени***, который проходит непосредственно через все n точек заданного массива данных. Аппроксимирующая функция представляется в виде ***интерполяционного многочлена в******форме Лагранжа*** или ***интерполяционного многочлена в форме Ньютона***.
* построения ***аппроксимирующего многочлена******n-степени***, который проходит в ближайшей близости от точек из заданного массива данных. Таким образом, аппроксимирующая функция сглаживает все случайные помехи (или погрешности), которые могут возникать при выполнении эксперимента: измеряемые значения в ходе опыта зависят от случайных факторов, колеблющихся по своим собственным случайным законам (погрешности измерений или приборов, неточность или ошибки опыта). В этом случае аппроксимирующая функция определяется по методу наименьших квадратов.

***Метод наименьших квадратов*** - математический метод, основанный на определении аппроксимирующей функции, которая строится в ближайшей близости от точек из заданного массива экспериментальных данных. Близость исходной и аппроксимирующей функции определяется числовой мерой, а именно: сумма квадратов отклонений (невязок) экспериментальных данных от аппроксимирующей кривой должна быть наименьшей.

Аппроксимирующая функция, построенная по методу наименьших квадратов, определяется из условия минимума суммы квадратов отклонений расчетной аппроксимирующей функции от заданного массива экспериментальных данных. Данный критерий метода наименьших квадратов записывается в виде следующего выражения:

где - значения расчетной аппроксимирующей функции; - заданный массив экспериментальных данных в узловых точках .

Квадратичный критерий обладает рядом свойств, дифференцируемость, обеспечение единственного решения задачи аппроксимации при полиномиальных аппроксимирующих функциях.

В зависимости от условий задачи аппроксимирующая функция представляет собой многочлен степени

Степень аппроксимирующей функции не зависит от числа узловых точек, но ее размерность должна быть всегда меньше размерности (количества точек ) заданного массива экспериментальных данных:

* если степень аппроксимирующей функции , то аппроксимируем табличную функцию прямой линией (линейная регрессия);
* если степень аппроксимирующей функции , то аппроксимируем табличную функцию квадратичной параболой (квадратичная аппроксимация);
* если степень аппроксимирующей функции , аппроксимируем табличную функцию кубической параболой (кубическая аппроксимация);
* в общем случае, когда требуется построить аппроксимирующий многочлен степени для заданных табличных значений, условие минимума суммы квадратов отклонений по всем узловым точкам переписывается в следующем виде:

где , - координаты узловых точек таблицы; - неизвестные коэффициенты аппроксимирующего многочлена степени ; - количество заданных табличных значений.

Необходимым условием существования минимума функции является равенство нулю ее частных производных по неизвестным переменным . В результате дифференцирования по ним получим следующую систему уравнений:

Преобразуем полученную линейную систему уравнений: раскроем скобки и перенесем свободные слагаемые в правую часть выражения. В результате полученная система линейных алгебраических уравнений относительно переменных будет записываться в следующем виде:

Данная система линейных алгебраических выражений может быть переписана в матричном виде

В результате получили систему линейных уравнений размерностью , которая состоит из неизвестных. Данная система может быть решена с помощью любого метода решения линейных алгебраических уравнений (например методом Гаусса). В результате решения будут найдены неизвестные параметры аппроксимирующей функции, обеспечивающие минимальную сумму квадратов отклонений аппроксимирующей функции от исходных данных, т.е. наилучшее возможное квадратичное приближение.

# 4.2. Интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа

Пусть на отрезке ] заданы точки , называемые узлами интерполяции, и значения некоторой интерполируемой функции в этих точках:, где ; ; … . То есть имеется таблица экспериментальных значений функции (табл. 4.1).

***Таблица 4.1***

**Таблица значений функции**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x*** |  |  |  | … |  | … |  |
|  |  |  |  | … |  | … |  |

**Постановка задачи**: требуется найти значения функции для промежуточных значений аргумента, не совпадающих с приведенными в табл. 4.1.

Получить аналитическое выражение функции по таблице ее значений часто бывает невозможно. Поэтому вместо нее строят другую функцию, например многочлен , которая легко вычисляется и имеет ту же таблицу значений, что и *,* т.е. , где . Такую задачу называют задачей ***интерполирования***. Точки () называются ***узлами интерполяции***; функция ***интерполируемая функция***; многочлен – ***интерполяционный многочлен***.

***Интерполяционный многочлен Лагранжа  
для не равноотстоящих узлов***

Пусть функция задана табл. 4.1. Построим интерполяционный многочлен *,* степень которого не больше *n* и для которого выполнены следующие условия:

, , .... .

Будем искать в виде , где — многочлен степени , при этом

Многочлены составим следующим способом:

Окончательно получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.1) |

Это и есть интерполяционный многочлен Лагранжа для неравноотстоящих узлов.

**Пример 4.1**. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной табл. 4.2.

***Таблица 4.2***

**Таблица значений функции**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| ***x*** | 1 | 3 | 4 |
|  | 12 | 4 | 6 |

Из табл. 4.2 следует, что (т.е. степень многочлена будет не выше, чем вторая); здесь ,,. Используя формулу (4.1), получаем:

Таким образом, приближающая функция для функции , заданной табл. 4.2, имеет вид .

***Интерполяционный многочлен Лагранжа  
для равноотстоящих узлов***

Узлы интерполяции равноотстоят друг от друга, когда расстояние между соседними точками равны между собой , . Значит, можно записать

, , … .

Тогда разность между узлами можно записать

Формула интерполяционного многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов

***Интерполяционный полином Ньютона  
для равноотстоящих узлов***

***Первая интерполяционная формула Ньютона***

Рассмотрим функцию, заданную табл. 4.1 с постоянным шагом, т.е. с равноотстоящими узлами , . Введем понятие ***конечной разности***.

Конечные разности первого порядка:

, , , … .

Конечные разности второго порядка:

, , , …  
 .

Конечные разности -го порядка рассчитываются по формуле

Пусть для функции, заданной таблицей с постоянным шагом, составлена таблица конечных разностей (табл. 4.3).

***Таблица 4.3***

**Таблица конечных разностей**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | **…** |
|  |  |  |  |  | … |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |  |
|  |  | … |  |  |  |
| … | … |  |  |  |  |

Будем искать интерполяционный многочлен в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2) |

Это многочлен -й степени. Значения коэффициентов *, , ...,*  можно найти из условия совпадения значений исходной функции и многочлена в узлах.

Полагая , из (4.2) находим , откуда .

Далее, придавая последовательно значения , получим

Подставив эти выражения в формулу (4.2), получим

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3) |

Это первая интерполяционная формула Ньютона. Для практического использования формулу (4.3) обычно записывают в несколько преобразованном виде. Для этого введем новую переменную :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4) |

Это и есть окончательный вид первой интерполяционной формулы Ньютона. Формулу (4.4) выгодно использовать для интерполирования функции в окрестности начального значения , где мало по абсолютной величине, т.е. когда и незначительно отличаются.

Если в формуле (4.4) положить , то получим формулу линейного интерполирования

Итак, первая интерполяционная формула Ньютона применяется для интерполирования вблизи левого конца таблицы – для интерполирования вперед и для вычислений , лежащих вне отрезка за левым концом – экстраполирования назад. Для интерполирования значений вблизи правого конца таблицы применяется вторая интерполяционная формула Ньютона.

***Вторая интерполяционная формула Ньютона***

Для получения второй интерполяционной формулы Ньютона нужно представить искомый многочлен в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5) |

Полагая значения в формуле (4.5) равными поочередно , можно вычислить все коэффициенты этого многочлена

Если подставить найденные коэффициенты в формулу (4.5), получится вторая интерполяционная формула Ньютона, которую тоже можно преобразовать, введя новую переменную ,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.6) |

Это и есть обычный вид второй интерполяционной формулы Ньютона. Вторая интерполяционная формула Ньютона (4.6) применяется при построении многочленов для узлов, расположенных ближе к правому концу таблицы (интерполирование назад) и для узлов, расположенных вне таблицы за правым концом (экстраполирование вперед).

***Погрешность интерполяционных многочленов  
Ньютона и Лагранжа***

Определим остаточные члены интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона

Остаточный член полинома Лагранжа

Остаточный член полинома Ньютона

**Контрольные вопросы**

1. Что такое аппроксимация?
2. Что такое интерполяция?
3. Какие методы локальной и глобальной интерполяции и аппроксимации существуют?
4. В чем сущность метода наименьших квадратов?
5. Интерполяционный многочлен Лагранжа для не равноотстоящих узлов.
6. Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов.
7. Что называется разностью первого порядка, второго порядка и т. д.?
8. Первая интерполяционная формула Ньютона для интерполяции вперед.
9. Вторая интерполяционная формула Ньютона для интерполяции назад.

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Функция задана таблично. Найти приближенное значение функции при данных значениях аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0,43 | 1,63597 | 0,702 | 0,503 |
| 0,48 | 1,73234 | 0,512 | 0,441 |
| 0,55 | 1,87686 | 0,645 | 0,602 |
| 0,62 | 2,03345 | 0,736 | 0,732 |
| 0,70 | 2,22846 |  |  |
| 0,75 | 2,35973 |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0,41 | 2,57418 | 0,616 | 0,444 |
| 0,46 | 2,32513 | 0,478 | 0,555 |
| 0,52 | 2,09336 | 0,665 | 0,714 |
| 0,60 | 1,86208 |  |  |
| 0,65 | 1,74926 |  |  |
| 0,72 | 1,62098 |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0,11 | 9,05421 | 0,314 | 0,222 |
| 0,15 | 6,61659 | 0,235 | 0,377 |
| 0,21 | 4,69170 | 0,332 | 0,123 |
| 0,29 | 3,35106 |  |  |
| 0,35 | 2,73951 |  |  |
| 0,40 | 2,36522 |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0,68 | 0,80866 | 0,896 | 0,603 |
| 0,73 | 0,89492 | 0,812 | 0,777 |
| 0,80 | 1,02964 | 0,774 | 0,906 |
| 0,88 | 1,20966 |  |  |
| 0,93 | 1,34087 |  |  |
| 0,99 | 1,52368 |  |  |

2. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  |  | | 1,415 | 0,888551 | | 1,420 | 0,889599 | | 1,425 | 0,890637 | | 1,430 | 0,891667 | | 1,435 | 0,892687 | | 1,440 | 0,893698 | | 1,445 | 0,894700 | | 1,450 | 0,895693 | | 1,455 | 0,896677 | | 1,460 | 0,897653 | | 1,465 | 0,898619 | | |  |  | | --- | --- | |  | 1,4161 | |  | 1.4625 | |  | 1.4135 | |  | 1.470 | |

3. Функция задана таблично. Решить задачу аппроксимации - найти полиномы первой и второй степени методом наименьших квадратов.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **y** | 5 | 1 | 4 | 2 | 3 |

4. Функции заданы таблично. Найти линейную аппроксимацию функции методом наименьших квадратов.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 | 2 |
|  | -6 | -1 | 4 | 9 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 4 | 6 |
|  | -2 | 4 | 10 | 16 |

5. Дана таблица значений функции . Вычислить значение функции при и .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 321,0 | 322,8 | 324,2 | 325,0 |
|  | 2,50651 | 2,50893 | 2,51081 | 2,51188 |

# 5. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Численное дифференцирование применяется в тех случаях, когда: функция задана таблично и, следовательно, методы дифференциального исчисления неприменимы; аналитическое выражение столь сложно, что вычисления производной представляют значительны трудности. В основе численного дифференцирования лежит следующий прием: исходная функция заменяется на рассматриваемом отрезке ] интерполяционным полиномом и считается, что и примерно равны, т.е. *.*

# 5.1. Численное дифференцирование на основе многочлена Лагранжа для равноотстоящих узлов

Всегда, когда возможно, для численного дифференцирования используется интерполяционный многочлен с равноотстоящими узлами, так как это значительно упрощает формулы численного дифференцирования. При равноотстоящих узлах строится интерполяционный полином Ньютона или Лагранжа, а затем он дифференцируется.

При численном дифференцировании интерполяционный полином строится не по всем узлам таблицы, а по трем-пяти близлежащим к точке, в которой требуется вычислить производную.

Если требуется вычислить производную во всех узлах, то вначале полином строится по первым трем-пяти узлам и в них вычисляется производная, далее полином строится по следующим трем-пяти узлам и в них вычисляется производная и т. д., пока не будет просчитана вся таблица.

Рассмотрим производную полинома Лагранжа.

Для квадратичной интерполяции () формула будет иметь вид

Вычислим значения производных в узлах при :

и т.д.

# 5.2. Численное дифференцирование на основе многочлена Ньютона для равноотстоящих узлов

Запишем для функции , заданной своими значениями в равноотстоящих узлах , первый интерполяционный многочлен Ньютона

Перепишем этот полином, произведя перемножение в скобках,

Дифференцируя по , получим

Подобно можно получить и производные функции более высоких порядков. Однако каждый раз, вычисляя значение производной функции в фиксированной точке , в качестве следует брать ближайшее слева узловое значение аргумента.

Если исходным значением оказывается один из узлов таблицы, то в этом случае каждый узел можно считать начальным, тогда, принимая , , получаем

*Замечания:*

1. В узлах, близких к центральному узлу, формулы численного дифференцирования отличаются большей точностью (меньшей погрешностью), чем в крайних узлах.
2. С увеличением количества узлов точность формул численного дифференцирования повышается.
3. С ростом порядка производной точность формул уменьшается (погрешность растет). Это связано с тем, что дифференцирование ухудшает свойства функции (дифференцируемая всюду функция может иметь производную функцию, которая не везде будет дифференцируемой, а непрерывная функция может перейти в разрывную).

**Контрольные вопросы**

* 1. В чем сущность численного дифференцирования?
  2. Интерполяционные полиномы Ньютона и Лагранжа для численного дифференцирования.
  3. Приближенные формулы для вычисления первой и второй производной функции.

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Функция задана таблично. Найти первую и вторую производную функции в точках х, заданных таблицей, используя интерполяционные многочлены Ньютона. Сравнить со значениями производных, вычисленными по формулам, основанным на интерполировании многочленом Лагранжа.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | |  |  | | --- | --- | | *x* | *y* | | 0,15 | 4,4817 | | 0,16 | 4,9530 | | 0,17 | 5,4739 | | 0,18 | 6,0496 | | 0,19 | 6,6859 | | 0,20 | 7,3891 | | 0,21 | 8,1662 | | 0,22 | 9,0250 | | 0,23 | 9,9742 | | 0,24 | 11,0232 | | 0,25 | 12,1825 | | 0,26 | 13,4637 | | 2. | |  |  | | --- | --- | | *x* | *y* | | 0,101 | 1,26183 | | 0,106 | 1,27644 | | 0,111 | 1,29122 | | 0,116 | 1,30617 | | 0,121 | 1,32130 | | 0,126 | 1,33660 | | 0,131 | 1,35207 | | 0,136 | 1,36773 | | 0,141 | 1,38357 | | 0,146 | 1,39959 | | 0,151 | 1,41579 | |
| 3. | |  |  | | --- | --- | | *x* | *y* | | 3,50 | 33,1154 | | 3,55 | 34,8133 | | 3,60 | 36,5982 | | 3,65 | 38,4747 | | 3,70 | 40,4473 | | 3,75 | 42,5211 | | 3,80 | 44,7012 | | 3,85 | 46,9931 | | 3,90 | 49,4024 | | 3,95 | 51,9354 | | 4,00 | 54,5982 | | 4,05 | 57,3975 | | 4,10 | 60,3403 | | 4. | |  |  | | --- | --- | | *x* | *y* | | 0,115 | 8,65729 | | 0,120 | 8,29329 | | 0,125 | 7,95829 | | 0,130 | 7,64893 | | 0,135 | 7,36235 | | 0,140 | 7,09613 | | 0,145 | 6,84815 | | 0,150 | 6,61659 | | 0,155 | 6,39386 | | 0,160 | 6,19658 | | 0,165 | 6,00551 | | 0,170 | 5,82558 | | 0,175 | 5,65583 | | 0,180 | 5,49543 | |
| 5. | |  |  | | --- | --- | | *x* | *y* | | 1,340 | 4,25562 | | 1,345 | 4,35325 | | 1,350 | 4,45522 | | 1,355 | 4,56184 | | 1,360 | 4,67344 | | 1,365 | 4,79038 | | 1,370 | 4,91306 | | 1,375 | 5,04192 | | 1,380 | 5,17744 | | 1,385 | 5,32016 | | 1,390 | 5,47069 | | 1,395 | 5,62968 | | 6. | |  |  | | --- | --- | | *x* | *y* | | 0,01 | 0,991824 | | 0,06 | 0,951935 | | 0,11 | 0,913650 | | 0,16 | 0,876905 | | 0,21 | 0,841638 | | 0,26 | 0,807789 | | 0,31 | 0,775301 | | 0,36 | 0,744120 | | 0,41 | 0,714193 | | 0,46 | 0,685470 | | 0,51 | 0,657902 | | 0,56 | 0,631442 | |

2. Используя различные методы численного дифференцирования, вычислить производную:

1) зная значения при, , , , , найти производную при , . Сравнить с точным значением;

2) зная при, , , , , найти производную при , . Сравнить с точным значением.

3. Дана таблица десятичного логарифма

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 340 | 350 | 360 | 370 |
|  | 2,531 | 2,544 | 2,556 | 2,568 |

Найти производную при , . Сравнить с точным значением.

4. Дана таблица

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,176 | 0,268 | 0,364 | 0,466 |
|  | 10° | 15° | 20° | 25° |

Найти производную при . Сравнить с точным значением.

# 6. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

К численному интегрированию обращаются, когда требуется вычислить определённый интеграл от функций, заданных таблично, или функций, непосредственное нахождение первообразной которых затруднительно (интеграл не берётся в элементарных функциях). В этом случае значение интеграла можно найти только приближенно, используя тот или иной способ численного интегрирования.

Численное интегрирование основано на замене подынтегральной функции суммой вида . Такая замена следует из определения интеграла как предела суммы . Приближенное равенство называется квадратурной формулой, где – узлы квадратурной формулы, – коэффициенты квадратурной формулы.

В зависимости от способа интерполяции подынтегральной функции различают разные методы численного интегрирования (методы прямоугольников, трапеций, парабол и др.). В качестве точки может выбираться любая точка в интервале . В зависимости от выбора этой точки различают методы левых, правых и центральных прямоугольников. Если – левая граница интервала, получаем метод левых прямоугольников, если – середина интервала, метод средних прямоугольников и т.д.

# 6.1. Методы численного интегрирования

Вычислим значение определенного интеграла для заданной на отрезке ] функции *f*(*x*).

Разобьем интервал ] на отрезков. Обозначая ,   
 – длина -го отрезка, , получаем следующие формулы численного интегрирования:

* метод *левых* *прямоугольников*
* метод *правых* *прямоугольников*
* метод *центральных* (*средних*) *прямоугольников*

* метод *трапеций*

При интегрировании с постоянным шагом получаются следующие формулы численного интегрирования:

* метод *левых прямоугольников*
* метод *правых прямоугольников*
* метод *центральных (средних) прямоугольников*
* метод *трапеций*
* метод ***Симпсона*** ( – четное, )

# 6.2. Погрешность формул численного интегрирования

Приведем формулы расчета погрешностей для формул численного интегрирования.

Формула *левых и правых прямоугольников*

Формула *средних прямоугольников*

Формула *трапеций*

Формула *Симпсона*

**Пример 6.1**. Вычислить интеграл *.*

Вычислим значение интеграла аналитически

Рассчитаем шаг . Составим таблицу для дальнейших вычислений интеграла (табл. 6.1).

***Таблица 6.1***

**Таблица вычислений для примера 6.1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 1.000 |  |  |
| 1 | 0.1 | 0.990 | 0.05 | 0.998 |
| 2 | 0.2 | 0.962 | 0.15 | 0.978 |
| 3 | 0.3 | 0.917 | 0.25 | 0.941 |
| 4 | 0.4 | 0.862 | 0.35 | 0.891 |
| 5 | 0.5 | 0.800 | 0.45 | 0.832 |
| 6 | 0.6 | 0.735 | 0.55 | 0.768 |
| 7 | 0.7 | 0.671 | 0.65 | 0.703 |
| 8 | 0.8 | 0.610 | 0.75 | 0.640 |
| 9 | 0.9 | 0.552 | 0.85 | 0.581 |
| 10 | 1 | 0.500 | 0.95 | 0.526 |

По формуле левых прямоугольников

По формуле правых прямоугольников

По формуле средних прямоугольников

По формуле трапеций

По формуле Симпсона

**Контрольные вопросы**

1. Понятие численного интегрирования.
2. Какие методы численного интегрирования существуют?
3. В чем отличия методов численного интегрирования?
4. В чем сущность методов левых, правых и средних прямоугольников?
5. В чем сущность метода трапеций?
6. В чем сущность метода Симпсона?
7. Какова погрешность формул численного интегрирования?
8. Какой из методов численного интегрирования является самым точным?

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Вычислить интегралы, используя квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол

2. Вычислить интеграл по формулам центральных (средних) прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона при и ; оценить погрешность результата.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. |  | 2. |  |
| 3. |  | 4. |  |
| 5. |  | 6. |  |
| 7. |  | 8. |  |
| 9. |  | 10. |  |
| 11. |  | 12. |  |
| 13. |  | 14. |  |
| 15. |  | 16. |  |
| 17. |  | 18. |  |
| 19. |  | 20. |  |

# 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ

Большое число научно-технических задач, а также исследования в области вычислительной математики требуют нахождения собственных значений и собственных векторов матриц.

Рассмотрим квадратную матрицу размерности с действительными элементами.

Матрица называется  
***характеристической матрицей*** для матрицы .

Определитель этой матрицы является многочленом -й степени и называется ***характеристическим многочленом матрицы*** . При этом коэффициент при старшей степени этого многочлена равен .

Характеристический многочлен можно записать в виде

Корни характеристического многочлена (, действительные или мнимые, называются ***характеристическими числами*** или ***собственными значениями*** матрицы .

Ненулевой вектор называется ***собственным вектором*** матрицы , если . Каждому собственному значению соответствует свой собственный вектор .

Для определения собственных векторов рассматривают характеристическое уравнение: . Характеристическое уравнение может быть записано в векторной форме, ему соответствует система уравнений

Определитель этой системы равен нулю (по определению собственных значений ), поэтому система имеет множество решений. Подставляя в систему каждое конкретное собственное значение и решая систему, находим собственный вектор , соответствующий .

Существует несколько способов нахождения собственных значений и собственных векторов.

# 7.1. Метод непосредственного развертывания

1. Пусть , т.е. рассматриваем матрицу .

Рассмотрим характеристическую матрицу

Запишем ее определитель, чтобы найти характеристический многочлен

Заметим, что коэффициент при равен сумме диагональных элементов матрицы , () а свободный член многочлена – определитель матрицы .

2. Пусть , т.е. рассматриваем матрицу , найдем характеристический многочлен

Коэффициенты характеристического многочлена равны:

– сумма диагональных элементов матрицы ;

– сумма диагональных миноров матрицы второго порядка;

– определитель матрицы .

В общем случае коэффициенты характеристического многочлена для матрицы

определяются следующим образом:

– сумма диагональных элементов матрицы ;

– сумма диагональных миноров матрицы второго порядка;

– сумма диагональных миноров матрицы третьего порядка;

…

– определитель матрицы .

Однако метод непосредственного развертывания становится очень трудоемким и ресурсоемким с увеличением размерности матрицы. Поэтому предложены и другие методы.

# 7.2. Метод Крылова

Метод Крылова для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы основан на теореме Гамильтона-Кэли, согласно которой любая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена. Если характеристический многочлен матрицы , то .

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы в виде

Подставляя в него матрицу , получаем уравнение

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.1) |

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор , умножая на него справа уравнение (7.1), получаем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.2) |

Положим , тогда

Подставим эти выражения в (7.2)

Перенесем вправо вектор , не зависящий от ,

Рассматривая покомпонентную запись вектора получаем систему уравнений относительно коэффициентов () характеристического многочлена

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.3) |

Элементы вычисляются по формулам:

…

Координаты первоначального вектора выбираются произвольно, например: . Если полученная система (7.3) не имеет единственного решения, то необходимо выбрать другой начальный вектор .

После нахождения коэффициентов характеристического многочлена , могут быть найдены его корни – собственные значения .

Зная собственные значения собственные векторы находятся по следующей формуле:

Коэффициенты (,) определяются по схеме Горнера по формулам: , .

# 7.3. Метод Данилевского

Метод Данилевского для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы основан на преобразованиях подобия матриц.

Матрицы и называются подобными (), если одна получается из другой путем умножения с помощью неособенной матрицы :  
. ***Неособенная или невырожденная матрица*** – квадратная матрица, определитель которой не равен нулю. Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены (соответственно и одинаковые собственные значения).

В методе Данилевского матрица преобразуется к подобной матрице следующего специального вида ():

Такой вид матрицы называется ***нормальной формой Фробениуса***. Характеристический многочлен для матрицы в нормальной форме Фробениуса будет определяться по формуле

Разложим определитель по первой строке:

Таким образом, в матрице первая строка содержит элементы , которые являются обратными коэффициентами характеристического многочлена

а все остальные элементы в матрице равны нулю, кроме элементов под главной диагональю, равных 1.

*Схема метода Данилевского для преобразования матрицы к  
нормальной форме Фробениуса*

Основные операции:

1. Рассматриваем матрицу :

ее последнюю строку необходимо преобразовать к виду: . Предположим, что элемент , разделим на этот элемент все элементы ()-го столбца матрицы .

2. Вычтем из всех остальных столбцов матрицы ()-й столбец, умноженный соответственно на числа .

3. В качестве неособенной матрицы рассматриваем матрицу , которая получается из единичной матрицы путем таких же преобразований:

где );

Матрица получается умножением матрицы на матрицу справа:

,

где , при ;

, при .

Матрица не является подобной матрице . Умножим матрицу слева на – обратную матрицу к матрице : . Матрица имеет следующий вид:

.

При этом матрица является подобной матрице и имеет последнюю строку, приведенную к форме Фробениуса:

.

Если , то повторяем операции 1 – 4, взяв за основу  
()-ю строчку матрицы : , . Операции повторяем до тех пор, пока не придем к форме Фробениуса .

Как уже отмечалось, характеристический многочлен матрицы совпадает с характеристическим многочленом исходной матрицы , соответственно равны и их собственные значения .

Рассмотрим конкретное собственное значение и найдем соответствующий ему – собственный вектор матрицы . По определению собственных векторов .

Умножая матрицу и вектор, можно получить систему уравнений

Положим , тогда

, , …, т.е.

Для нахождения собственного вектора матрицы , соответствующего собственному значению необходимо вектор умножить слева на матрицы , , , которые были рассчитаны при преобразованиях по методу Данилевского

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.4) |

***Особые случаи метода Данилевского***

Может возникнуть ситуация, когда элемент, относительно которого совершаются очередные преобразования матрицы, равен нулю. Пусть на некотором шаге пришли к виду

1. Если в ()-й строке левее элемента есть ненулевой элемент (, ), то меняем местами ()-й и -й столбцы и ()-ю и -ю строки для сохранения подобия. Теперь элемент будет и можно продолжать преобразования.

2. Если все элементы ()-й строки левее элемента равны нулю, то матрица будет иметь следующий вид:

В этом случае характеристический определитель матрицы будет равен произведению определителей матриц и :

При этом матрица уже имеет форму Фробениуса, поэтому метод Данилевского применяют в дальнейшем только к матрице .

Рассмотрим метод Данилевского более подробно для матриц второго и третьего порядка.

*Матрица второго порядка* .

Рассматриваем матрицу . Ищем подобную ей матрицу вида .

Пусть , тогда

Характеристический многочлен

*Матрица третьего порядка* .

Рассматриваем матрицу . Ищем подобную ей матрицу вида .

Пусть в матрице , тогда

|  |  |
| --- | --- |
| где | ; *,* |

На первом этапе получили следующую матрицу:

|  |  |
| --- | --- |
| где | . |

Пусть в матрице , тогда

|  |  |
| --- | --- |
| где | ; , |

На втором этапе получили матрицу в форме Фробениуса

Характеристический многочлен этой матрицы

Найдя корни характеристического уравнения, собственные числа, по формуле (7.4) можно найти собственные вектора.

**Пример 7.1**. Дана матрица , найти ее собственные числа и собственные векторы.

*1. Метод непосредственного развертывания*

Характеристический многочлен

Корни характеристического многочлена – собственные числа матрицы : и .

Рассмотрим , найдем соответствующий собственный вектор:

Отсюда , значит , например  
 или любой другой коллинеарный вектор.

Найдем собственный вектор, соответствующий :

Отсюда , значит , например или любой другой коллинеарный вектор.

*2. Метод Крылова*

Характеристический многочлен: . Его коэффициенты и вычисляем из следующих уравнений:

Получаем систему уравнений

Ее решения Характеристический многочлен . Его корни и .

Находим коэффициенты по схеме Горнера по формулам: , , их можно записать в табл. 7.1.

***Таблица 7.1***

**Коэффициенты, вычисленные по схеме Горнера**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |
|  | |  |  |  |
|  | |  |  |  |
|  |  | 1 | –5 | 0 |
|  |  | 1 | –2 | 0 |

Определим собственные векторы: , .

.

*3. Метод Данилевского*

, тогда

;

;

Получили матрицу в форме Фробениуса

.

Характеристический многочлен этой матрицы , его корни: и . Для каждого корня находим следующие собственные вектора матрицы : и . По формуле (7.4) определяем собственные векторы исходной матрицы:

.

.

**Пример 7.2**. Дана матрица , найти ее собственные числа и собственные векторы.

*1. Метод непосредственного развертывания*

Корни характеристического многочлена – собственные числа матрицы : , и .

:

Первое и второе уравнение линейно зависимые, значит второе можем не рассматривать.

Умножим первое уравнение на 3 и вычтем его из второго уравнения:

Решая систему, получаем

, , .

Найдем собственные вектора, соответствующие :

:

Третье уравнение является разностью между вторым и первым, его можно исключить. Умножим первое уравнение на 2 и прибавим ко второму:

Решая систему, получаем

Найдем собственный вектор, соответствующий :

*2. Метод Крылова*

Характеристический многочлен Его коэффициенты и вычисляем из следующих уравнений:

Получаем систему уравнений

Решая систему из двух последних уравнений, можно получить

Отсюда , , .

Характеристическое уравнение , его корни: , .

Находим коэффициенты по схеме Горнера (табл. 7.2).

***Таблица 7.2***

**Коэффициенты, вычисленные по схеме Горнера**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |
|  | |  |  |  |  |
|  |  | 1 | –2 | –3 | 0 |
|  |  | 1 | 2 | 1 | 0 |

Находим собственные векторы

*3. Метод Данилевского*

; ;

На первом этапе получили матрицу

.

В последней матрице , поэтому

; ;

.

На втором этапе получили матрицу в форме Фробениуса

Характеристическое уравнение , его корни: , .

.

.

.

.

**Контрольные вопросы**

1. Что такое собственное число матрицы?
2. Что такое собственный вектор матрицы?
3. Что называется характеристическим уравнением матрицы?
4. Что называется характеристическим многочленом матрицы?
5. Что такое характеристическая матрица?
6. Какой метод используется для определения корней характеристического многочлена?
7. Какой метод используется для определения коэффициентов характеристического уравнения?
8. Каким образом определяются координаты собственного вектора?
9. В чем сущность метода Крылова?
10. В чем сущность метода Данилевского?

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Используя метод Крылова, найти собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственные числа определить с четырьмя верными цифрами, а собственные векторы – с тремя десятичными знаками. Сравнить полученные значения со значениями, полученными по определению.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

2. Найти собственные числа и собственные вектора матрицы

# 8. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим некоторые численные методы решения ***задачи Коши*** обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Постановка задачи Коши: необходимо найти ***частное решение*** дифференциального уравнения , удовлетворяющего начальными условиям *.*

**Численное решение дифференциальных уравнений** заключается в вычислении функции в некоторых заданных точках , лежащих на определенном отрезке, т.е. .

Множество значений , в которых определяется значение функции, называют ***сеткой***, на которой определена функция . Сами координаты при этом называют ***узлами сетки***. Чаще всего используются ***равномерные сетки***, в которых расстояние между соседними узлами постоянно и называется ***шагом сетки* *h,*** или ***шагом интегрирования*** дифференциального уравнения

Преобразуем уравнение , умножив его на ,

Проинтегрируем левую и правую части уравнения между-м и  
()-м узлами сетки:

Из последнего уравнения получаем следующую зависимость:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8.1) |

Мы получили выражение для построения решения в ()-м узле интегрирования через значения и в -м узле сетки. Но в правой части уравнения (8.1) есть интеграл от неявно заданной функции , нахождение которого в аналитическом виде в общем случае невозможно.

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений различным способом аппроксимируют (приближают) значение этого интеграла для построения формул численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Из множества разработанных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методов рассмотрим методы Эйлера, Рунге-Кутта и Адамса.

# 8.1. Методы численного решения дифференциальных уравнений. Метод Эйлера

Наиболее простым способом численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка является метод Эйлера. В его основе лежит аппроксимация производной отношением конечных приращений зависимой () и независимой () переменных между узлами равномерной сетки:

где - это искомое значение функции в точке .

Если преобразовать это уравнение и учесть равномерность сетки интегрирования (*h*=const), получим итерационную формулу, описывающую метод Эйлера,

Очевидно, что для приближенного вычисления интеграла в методе Эйлера используется простейшая формула интегрирования - формула левых прямоугольников. Ошибка метода Эйлера прямо пропорциональна шагу интегрирования .

**Пример 8.1.** Используя метод Эйлера, построить приближенное решение для следующей задачи Коши:

на интервале [0,1] с шагом .

Аналитическое решение данной задачи .

*Численное решение* *методом Эйлера*

Для первых трех узлов сетки получим:

Результаты вычислений приведены в табл. 8.1. Во втором столбце таблицы для сравнения приведены точные значения решения уравнения в узлах сетки.

***Таблица 8.1***

**Решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x*** | **Точное решение** | **Приближенное решение** |
| 0 | 0,000000 | 0,000000 |
| 0,1 | 0,004837 | 0,000000 |
| 0,2 | 0,018731 | 0,010000 |
| 0,3 | 0,040818 | 0,029000 |
| 0,4 | 0,070320 | 0,056100 |
| 0,5 | 0,106531 | 0,090490 |
| 0,6 | 0,148812 | 0,131441 |
| 0,7 | 0,196585 | 0,178297 |
| 0,8 | 0,249329 | 0,230467 |
| 0,9 | 0,306570 | 0,287420 |
| 1 | 0,367879 | 0,348678 |

# 8.2. Усовершенствованный метод Эйлера (метод Гюна)

Точность метода Эйлера можно повысить, если воспользоваться для аппроксимации интеграла в формуле (8.1) более точной формулой интегрирования – формулой трапеций

Данное выражение является уравнением относительно , решить которое можно каким-либо итерационным методом. Также можно поступить иначе и приблизительно вычислить значение функции в ()-м узле с помощью обычной формулы Эйлера, формулы (8.1)

Таким образом, для каждого узла интегрирования производится следующая цепочка вычислений:

Данный метод называется модифицированным методом Эйлера, методом Эйлера с пересчетом или **методом Гюна**. Благодаря более точной формуле интегрирования, погрешность метода Гюна пропорциональна уже квадрату шага интегрирования, т.е. *.*

**Пример 8.2.** Используя модифицированный метод Эйлера, построить приближенное решение для следующей задачи Коши:

на интервале [0,1] с шагом .

*Численное решение* *методом Гюна*

Последовательно для всех узлов вычисляем значения и :

и т.д*.*

Результаты вычислений приведены в табл. 8.2. Во второй колонке таблицы приведены точные значения решения равнения в узлах сетки.

***Таблица 8.2***

**Решение обыкновенных дифференциальных уравнений   
модифицированным методом Эйлера**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***x*** | **Точное решение** | **Приближенное решение** |
| 0 | 0,000000 | 0,00000 |
| 0,1 | 0,004837 | 0,00500 |
| 0,2 | 0,018731 | 0,01903 |
| 0,3 | 0,040818 | 0,04122 |
| 0,4 | 0,070320 | 0,07080 |
| 0,5 | 0,106531 | 0,10708 |
| 0,6 | 0,148812 | 0,14940 |
| 0,7 | 0,196585 | 0,19721 |
| 0,8 | 0,249329 | 0,24998 |
| 0,9 | 0,306570 | 0,30723 |
| 1 | 0,367879 | 0,36854 |

Отметим существенное увеличение точности вычислений по сравнению с методом Эйлера.

# 8.3. Методы Рунге-Кутты

Воспользовавшись [формулой Симпсона](http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/Integration.php#Simpson_form) для вычисления интеграла в формуле (8.1), можно получить еще более точную формулу для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка - широко используемого в вычислительной практике метода Рунге-Кутты.

В [формуле Симпсона](http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/Integration.php#Simpson_form) для приближенного вычисления определенного интеграла используются значения подынтегрального выражения в трех точках. В интеграле их всего две, поэтому введем дополнительную точку в середине отрезка ,

тогда:

Полученное выражение является неявным, так как в правой части содержатся еще не определенные значения функции и . Чтобы воспользоваться этой формулой, надо использовать некоторое приближение для вычисления этих значений.

При использовании различных методов приближенного вычисления этих величин получаются выражения для методов Рунге-Кутты различного порядка точности.

*Алгоритм Рунге-Кутты третьего порядка.* Погрешность вычислений данного алгоритма

|  |  |
| --- | --- |
| где |  |

*Алгоритм Рунге-Кутты четвертого порядка* Погрешность вычислений данного алгоритма

|  |  |
| --- | --- |
| где |  |

Алгоритмы третьего и четвертого порядков требуют на каждом шаге трех и четырех вычислений функции соответственно, но являются весьма точными.

**Пример 8.3.** Используя алгоритм Рунге-Кутты третьего и четвертого порядков, решить следующую задачу Коши:

на интервале [0,1] с шагом .

*Численное решение* *методами Рунге-Кутты*

Для алгоритма третьего порядка для узла получаем следующие вычисления:

Для алгоритма четвертого порядка для узла получаем следующие вычисления:

Приведем таблицу (табл.8.3) решения с шагом интегрирования  
 методов Рунге-Кутты 3-го и 4-го порядков на интервале [0,1].

***Таблица 8.3***

**Решение обыкновенных дифференциальных уравнений Рунге-Кутты  
3-го (РК3) и 4-го (РК4) порядков**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | **Точное решение** | **Метод РК3** | **Метод РК4** |
| 0 | 0,000000 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,004837 | 0,00483333 | 0,0048375 |
| 0,2 | 0,018731 | 0,01872336 | 0,0187309 |
| 0,3 | 0,040818 | 0,04080819 | 0,04081842 |
| 0,4 | 0,070320 | 0,07030794 | 0,07032029 |
| 0,5 | 0,106531 | 0,10651697 | 0,10653093 |
| 0,6 | 0,148812 | 0,14879677 | 0,14881193 |
| 0,7 | 0,196585 | 0,19656961 | 0,19658562 |
| 0,8 | 0,249329 | 0,24931274 | 0,24932929 |
| 0,9 | 0,306570 | 0,30655314 | 0,30656999 |
| 1 | 0,367879 | 0,36786283 | 0,36787977 |

Высокая точность вместе с достаточной простотой реализации делает метод Рунге-Кутты 4-го порядка одним из самых распространенных численных методов решения задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

# 8.4. Многошаговые методы. Метод Адамса

Рассмотренные ранее методы (Эйлера, Рунге-Кутты) используют значение функции на одном предшествующем шаге, поэтому они относятся к одношаговым методам. Точность вычислений можно увеличить, если использовать при нахождении решения в некотором узле информацию о значениях функции, полученных в нескольких () предыдущих узлах сетки интегрирования .

Если используются значения в предыдущих узлах, то говорят о -шаговом методе интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Суть его заключается в следующем: по значениям функции, вычисленным в предшествующих узлах, строится интерполяционный полином Лагранжа степени – , который используется при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Интеграл при этом выражается через квадратурную формулу

где квадратурные коэффициенты.

Очевидно, что при в качестве частного случая получается уже известная [формула Эйлера](http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/ODE.html#6-5) (8.1). Значения квадратурных коэффициентов для от 2 до 4 приведены в табл. (8.4).

***Таблица 8.4***

**Значения квадратурных коэффициентов**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |

Полученное таким образом семейство формул называется ***явной -шаговой схемой Адамса*** (***метод Адамса-Башфорта***).

Например, четырехшаговая явная формула Адамса может быть записана так:

.

Если для построения интерполяционного полинома использовать k узлов, начиная с , то можно получить формулы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, известные как ***неявные схемы Адамса*** (или ***методы Адамса-Моултона***).

Например, четырехшаговая неявная формула Адамса-Моултона имеет следующий вид:

.

Достоинством многошаговых методов Адамса при решении обыкновенных дифференциальных уравнений заключается в том, что в каждом узле рассчитывается только одно значение правой части обыкновенных дифференциальных уравнений – функции .

К недостаткам можно отнести невозможность старта многошагового метода из единственной начальной точки, так как для вычислений по -шаговой формуле необходимо знание значения функции в узлах. Поэтому приходится решение в первых узлах получать с помощью какого-либо одношагового метода, например метода [Рунге-Кутты 4-го порядка](http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/Source/NumMethods/ODE.html#RK4_form).

**Контрольные вопросы**

* 1. Сформулируйте постановку задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
  2. Что является решением дифференциального уравнения?
  3. Как численно решить дифференциальное уравнение методом Эйлера?
  4. В чем сущность усовершенствованного метода Эйлера?
  5. Как численно решить дифференциальное уравнение методом Рунге-Кутты?
  6. В чем разница методов Рунге-Кутты третьего и четвертого порядков?
  7. В чем сущность многошаговых методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений?
  8. Четырехшаговая формула Адамса.
  9. Четырехшаговая формула Адамса-Моултона.
  10. В чем достоинства и недостатки многошаговых методов?

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

1. Решить задачу Коши методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутты

2. Решить задачу Коши методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутты

3. Используя метод Эйлера и метод Эйлера с пересчетом, решить задачу Коши на отрезке ] с шагом . Проверить полученные значения, используя метод Рунге-Кутты 4 порядка.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

4. Используя метод Адамса с третьими разностями, решить задачу Коши на отрезке [0, 1] c шагом . Все вычисления вести с четырьмя знаками. Начальный отрезок определить методом Рунге-Кутты. Проверить полученные значения, используя метод Эйлера с пересчетом.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | **Андреев, Г.Н.** Вычислительная математика / Г.Н. Андреев. - М.: МГИУ, 2007. – 166 c. |
| 2. | **Бахвалов, Н.С.** Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. – 592 с. |
| 3. | **Воробьева, Г.Н.** Практикум по численным методам / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. – М.: Высш. шк., 1979. – 184 с. |
| 4. | **Гавриков, М.Б.** Функциональный анализ и вычислительная математика / М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский. - М.: Ленанд, 2016. - 344 c. |
| 5. | **Гутер, Р. С.** Программирование и вычислительная математика. – Вып. 2: Вычислительная математика. Программная реализация вычислительных методов / Р.С. Гутер, П.Т. Резниковский. – М.: Наука, 1971. – 264 с. |
| 6. | **Демидович, Б. П.** Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учеб. пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – СПб.: Лань, 2008. – 400 с. |
| 7. | **Демидович, Б. П.** Основы вычислительной математики: учеб. пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – СПб.: Лань, 2011. – 672 с. |
| 8. | **Жидков, Е.Н.** Вычислительная математика: учеб. пособие / Е.Н. Жидков. – М.: Академия, 2019. – 224 c. |
| 9. | **Иванов, В.М.** Численные методы /В. М. Иванов. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2003. – 114 с. |
| 10. | **Копченова, Н.В.** Вычислительная математика в примерах и задачах: учеб. пособие / Н.В. Копченова, И.А. Марон. – СПб.: Лань, 2017. – 368 c. |
| 11. | **Костомаров, Д.П.** Вводные лекции по численным методам: учеб. пособие /Д.П. Костомаров, А.П. Фаворский. – М.: Логос, 2006. – 184 с. |
| 12. | **Краснов, М.Л.** Вся высшая математика. Т.6. Вариационное исчисление, линейное программирование, вычислительная математика, теория сплайнов / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: КД Либроком, 2014. – 256 c. |
| 13. | **Лапчик, М.П.** Численные методы / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер. – М.: Academia, 2009. – 384 с. |
| 14. | **Минькова, Р.М.** Методы вычислительной математики / Р.М. Минькова, Р.А. Вайсбурд. – Свердловск: Изд-во УПИ им. С.М. Кирова, 1981. – 88 с. |
| 15. | **Пантина, И.В.** Вычислительная математика: учебник / И.В. Пантина, А.В. Синчуков. – М.: МФПУ Синергия, 2012. – 176 c. |
| 16. | **Петров, Ю.** История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика / Ю. Петров. – СПб.: BHV, 2012. – 448 c. |
| 17. | **Рябенький, В.С.** Введение в вычислительную математику: учеб. пособие / В.С. Рябенький. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 288 с. |
| 18. | **Соловьёв, И.А.** Вычислительная математика на смартфонах, коммуникаторах и ноутбуках с использованием программных сред Python: учеб. пособие / И.А. Соловьёв, А.В. Червяков, А.Ю. Репин. – СПб.: Лань, 2011. – 272 c. |
| 19. | **Серовайский, С.Я.** История математики: Эволюция математических идей: Вычислительная математика. Теория вероятностей. Информатика. Математическая логика / С.Я. Серовайский. – М.: Ленанд, 2019. - 240 c. |
| 20. | **Турчак, Л.И.** Основы численных методов: учеб. пособие / Л.И.Турчак, П.В. Плотников. –М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с. |
| 21. | **Устинов, С.М.** Вычислительная математика: учеб. пособие /С.М. Устинов, В.А. Зимницкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 336 с. |
| 22. | **Формалеев, В.Ф.** Численные методы/ В.Ф. Формалеев, Д.Л. Ревизников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с. |
| 23. | **Макоха** **А.Н.** Основы вычислительной математики, математического и информационного моделирования: лаб. практикум / А.Н. Макоха, М.А. Дерябин. – Ставрополь: СКФУ, 2018. – 195 с. |

**Панкратова Анна Зурабовна**

**Суркова Анна Сергеевна**

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**

Редактор **Т.В. Третьякова**

Компьютерный набор и версткаавторов

Подписано в печать 19.04.23. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,25.

Тираж 30 экз. Заказ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Типография НГТУ.

Адрес университета и полиграфического предприятия:

603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.